R^n上的线性子空间：

1. R^n上的线性子空间：向量的集合 U 满足

① $\vec{0}\in U$

② $\vec{u},\vec{v}\in U$，$\vec{u}+\vec{v}\in U$

③ $\vec{u}\in U$，$\lambda\vec{u}\in U$，$\lambda\in R$

} 关于向量的加法和数乘封闭

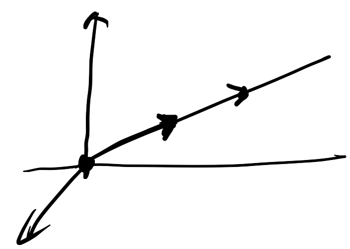
$\Rightarrow$ U是R^n上的线性子空间

注：三个条件可以合并为一个条件：$\vec{u},\vec{v}\in U$，则 $\underline{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\in U}$ $\Rightarrow$ U为线性子空间

例1、过原点的直线是R^3上的一个线性子空间。

解：记L为过原点的直线。$\Rightarrow$ $L:\{\vec{x}\mid \vec{x}=t\vec{d}, t\in R\}$，$\vec{d}$为$L$的方向向量

(一般直线L：$\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{d}$)



$\vec{u}\in L$，$\vec{u}=t_1\vec{d}$

$\vec{v}\in L$，$\vec{v}=t_2\vec{d}$

$\Rightarrow$ ① $\vec{0}\in L$

② $\vec{u}+\vec{v}=t_1\vec{d}+t_2\vec{d}=(t_1+t_2)\vec{d}\in L$

③ $\lambda\vec{u}=\lambda(t_1\vec{d})=(\lambda t_1)\vec{d}\in L$

} $\Rightarrow$ L是R^3上的线性子空间

例2、过原点的平面是R^3上的线性子空间。

解：过原点的平面Σ：$Ax+By+Cz=0$ (一般式方程)

$\vec{n}\cdot(x,y,z)=0$　　$\vec{n}=(A,B,C)$

① $\vec{0}\in\Sigma$

② $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)\in\Sigma$　　$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$，$\vec{n}\cdot\vec{v}=0$

$\Rightarrow$ $\vec{n}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{n}\cdot\vec{u}+\vec{n}\cdot\vec{v}=0+0=0$

$\Rightarrow$ $\vec{u}+\vec{v}\in\Sigma$

③ $\vec{n}\cdot(\lambda\vec{u})=\vec{n}\cdot(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)=\lambda(\vec{n}\cdot\vec{u})=0$

$\Rightarrow$ Σ 是 R^3 上的线性子空间.

注: 不过原点的直线和平面不是 R^3 上的线性子空间

例3. 所有形如 $U=\{\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}\}$ 的向量是一个 R^n 上的线性子空间

解: ① $\vec{0}\in U$

② $\vec{u}\in U$, $\vec{v}\in U$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\b_1\\\vdots\\b_{n-1}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_{n-1}+b_{n-1}\end{pmatrix}\in U$$

③ $\lambda\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\\lambda a_1\\\vdots\\\lambda a_{n-1}\end{pmatrix}\in U$

$\Rightarrow$ U 是 R^n 上的线性子空间

例4 $U=\{\vec{\alpha}\mid\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}, a\in R\}$ 不是线性子空间.

解: $\vec{0}\notin\vec{u}$ $\Rightarrow$ U 不是 R^3 上的线性子空间.

例5. 设 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_p$ 是一组 n维 向量, U 是 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_p$ 的所有线性组合的集合. 证明 U 是 R^n 上的线性子空间.

证明: $U=\{\vec{\alpha}\mid\vec{\alpha}=k_1\vec{v}_1+\cdots+k_p\vec{v}_p,\ k_i\in R,\ 1\le i\le p\}$.

① $\vec{0}\in U$, 只需取 $k_i=0$, $1\le i\le p$.

② $\vec{u}\in U$, $\vec{v}\in U$

$\vec{u}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\cdots+\lambda_p\vec{v}_p$, $\vec{v}=\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2+\cdots+\mu_p\vec{v}_p$

$$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(\lambda_1\vec{v}_1+\cdots+\lambda_p\vec{v}_p)+(\mu_1\vec{v}_1+\cdots+\mu_p\vec{v}_p)$$

$= (\lambda_1+\mu_1)\vec{v_1} + \cdots + (\lambda_p+\mu_p)\vec{v_p} \in U$

③ $\lambda\vec{u} = (\lambda\lambda_1)\vec{v_1} + \cdots + (\lambda\lambda_p)\vec{v_p} \in U$

$\Rightarrow$ U 是 R^n 上的线性子空间.

2. 生成子空间: $U = \{\vec{x} \mid \vec{x} = k_1\vec{v_1} + \cdots + k_p\vec{v_p}\}$ 为 $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_p}$ 生成的子空间

或称为 $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_p}$ 扩张成的子空间. 有时候记为

$$U = \mathrm{span}\{\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_p}\}.$$

例6. 矩阵的解空间(零空间) $U = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = 0\}$. 称为矩阵 A 的解空间

或者零空间.

解: ① $\vec{0} \in U$

② $\vec{u} \in U$, $V \in U$, $A\vec{u} = 0$, $A\vec{v} = 0$

$\Rightarrow A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

③ $A(\lambda\vec{u}) = \lambda A\vec{u} = 0$

} U 是 R^n 上线性子空间

另外: 设 $\vec{\xi_1}, \cdots, \vec{\xi_p}$ 是 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的基础解系

$\Rightarrow U = \{\vec{x} = c_1\vec{\xi_1} + c_2\vec{\xi_2} + \cdots + c_p\vec{\xi_p}\} = \mathrm{span}\{\vec{\xi_1}, \cdots, \vec{\xi_p}\}.$